1. FORMULAZIONE HAMILTONIANA DELLA MECCANICA

Introduzione

L'idea base della formulazione meccanica di Hamilton è quella di trattare le *n* coordinate *q* e i relativi impulsi *p* come variabili indipendenti. Pagando il prezzo di raddoppiare il numero di gradi di libertà rispetto alle sole coordinate, si ottiene però il vantaggio di studiare il moto mediante equazioni differenziali del primo ordine, laddove nella formulazione Lagrangiana il sistema veniva trattato con equazioni del secondo.

Per l'assunzione fatta di trattare le *2n* variabili in modo equivalente si può allora pensare a possibili trasformazioni da vecchie a nuove variabili, anche con un completo rimescolamento in modo che si possa scrivere, nella forma più generica possibile:

$$\begin{cases} Q = Q(q,p,t) \\ P = P(q,p,t) \end{cases}$$

1-1

Chiaramente non tutti i possibili cambiamenti di variabili sono validi per descrivere un sistema; infatti la condizione da verificare è che si tratti di trasformazioni canoniche, ossia che preservino il principio di Hamilton modificato che come sappiamo recita:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(P_i\dot{Q}_i - K(Q,P,t)\right) dt = 0$$

1-2

In cui *K* è la nuova Hamiltoniana nel sistema di coordinate variato. La condizione precedente è quindi invariante in forma rispetto a quella sulle coordinate di partenza:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i\dot{q}_i - H(q,p,t))\, dt = 0$$

e rappresenta una condizione necessaria per poter scrivere le equazioni del moto nelle nuove variabili nella forma canonica:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

1-3

La trasformazione più generale che preserva il principio di Hamilton modificato è data dalla seguente:

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

1-4

In cui il parametro λ è detto valenza della trasformazione e determina un semplice cambio di scala, mentre all'ultimo termine compare una derivata totale rispetto al tempo. Di seguito lavoreremo con trasformazioni di valenza 1, ossia prive di cambio di scala.

F può essere funzione di qualsiasi commistione di coordinate vecchie e nuove; quando si hanno variabili di entrambi i tipi si parla di funzione generatrice, in quanto permette effettivamente di ricavare le equazioni della trasformazione. Ci si può rendere facilmente conto di questo considerando ad esempio il caso:

$$F_1 = F_1(q, Q, t)$$

1-5

L'equazione che lega le Hamiltoniane nei due insiemi di variabili diventa allora:

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \boxed{\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}}$$

1-6

Poiché q e Q sono indipendenti tra loro, l'equazione precedente implica:

$$p_i(q, Q, t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i(q, Q, t) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

1-7

Assumendo l'invertibilità della prima delle precedenti è quindi possibile scrivere $Q = Q(q, p, t)$. Infine per ricavare la forma dell'Hamiltoniana *K* nelle nuove variabili scriveremo il tutto recuperando le dipendenze funzionali:

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1(q(Q, P, t), Q)}{\partial t}$$

1-8

Da quanto detto emerge quindi che a partire da una data funzione generatrice è possibile ricavare la trasformazione canonica; generalmente si può anche invertire il processo, ossia ricavare una funzione generatrice a partire dalla trasformazione, ma ciò non è sempre possibile scegliendo arbitrariamente il set di variabili di cui questa è funzione. È comunque utile distinguere quattro principali specie di funzioni generatrici, che pur non esaurendo tutta la casistica necessaria per scrivere qualsiasi trasformazione, permettono di operare su una importante varietà di situazioni:

$$F_1 = F_1(q, Q, t)$$

$$F_2 = F_2(q, P, t)$$

$$F_3 = F_3(p, Q, t)$$

$$F_4 = F_4(p, P, t)$$

1-9

Si può mostrare che i quattro tipi di funzioni generatrici sono legati l'uno all'altro da una trasformata di Legendre. È importante osservare che tali specie non sono in generale sufficienti a descrivere tutte le trasformazioni canoniche: può essere ad esempio necessario mescolare tutti e quattro i tipologici di variabili q, p, Q, P oltre al tempo.

Trasformazioni canoniche infinitesime

Il concetto di trasformazione canonica infinitesima (o ICT, dall'acronimo inglese) è fondamentale dal momento che molte trasformazioni discrete, come anche l'evoluzione temporale, possono essere ricavate come successione di ICT.

La forma delle equazioni di trasformazione sarà banalmente:

$$\begin{cases} Q = q + \delta q \\ P = p + \delta p \end{cases}$$

1-10

Una funzione generatrice adatta a descrivere questo tipo di trasformazione potrebbe essere la seguente, di seconda specie:

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t)$$

1-11

Dove G è una funzione differenziabile, ed ϵ un parametro infinitesimo. Si costruisce allora la funzione F in questo modo:

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t) - Q_i P_i$$

1-12

Sostituendo nell'equazione:

$$\begin{aligned} p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \left(P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i + \left(q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i}\right) \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i \\ = -K + \left(P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i + \left(q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i}\right) \dot{P}_i - Q_i \dot{P}_i \end{aligned}$$

1-13

La relazione per l'impulso si ricava facilmente:

$$p_i = P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i} \Leftrightarrow \delta p = P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i}$$

1-14

Per i termini che riguardano le coordinate è necessario considerare che P_i differisce da p_i solo per un infinitesimo: quindi nella derivata P_i può essere sostituito da p_i.

$$Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q,P,t)}{\partial P_i} \cong q_i + \epsilon \frac{\partial G(q,P \cong p,t)}{\partial p_i} \Leftrightarrow \delta q = Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial G(q,p,t)}{\partial p_i}$$

1-15

Esempi di trasformazioni infinitesime possono essere banalmente la traslazione, la rotazione, l'evoluzione temporale.

Parentesi di Poisson ed equazioni del moto

La parentesi di Poisson di due funzioni delle variabili canoniche (q,p) è definita:

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

1-16

Vale la pena fin da subito ricordare una proprietà fondamentale delle parentesi nota come Identità di Jacobi, che deriva dalla somma di permutazione ciclica di elementi entro una doppia parentesi.

$$\big[f,[g,h]\big] + \big[g,[h,f]\big] + \big[h,[f,g]\big] = 0$$

1-17

Si mostra facilmente che ogni parentesi di Posson è un invariante canonico, ossia assume lo stesso valore rispetto ad ogni insieme di coordinate canoniche. Ciò detto, la derivata temporale di una qualsiasi funzione sarà data da:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

1-18

Segue in particolare, sostituendo nella precedente ad *f* la stessa funzione *H*:

$$\frac{dH}{dt} = [H,H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

1-19

Se inoltre una funzione *u* è una costante del moto:

$$0 = \frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t} \Leftrightarrow [H, u] = \frac{\partial u}{\partial t}$$

1-20

L'espressione può essere quindi letta anche in senso inverso: tutte le funzioni che verificano l'ultima uguaglianza sono costanti del moto. In particolare, utilizzando un lessico proprio della meccanica quantistica, se una funzione non dipendente esplicitamente dal tempo commuta con l'Hamiltoniana (ossia, nel caso classico, la sua parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana è nulla), allora tale funzione è una costante del moto.

Osserviamo anche, dall'identità di Jacobi, che la parentesi di Poisson di due costanti del moto è ancora una costante del moto, risultato noto come Teorema di Poisson:

$$0 = \big[H, [u, v]\big] + \big[u, [v, H]\big] + \big[v, [H, u]\big] = \big[H, [u, v]\big]$$

1-21

Dunque l'applicazione reiterata dell'identità di Jacobi permette di individuare nuove costanti del moto. Vogliamo adesso utilizzare questi strumenti per studiare la funzione generatrice dell'evoluzione temporale, avendone posto l'esistenza (che dimostreremo), riformulando in termini di parentesi di Poisson le equazioni di una trasformazione infinitesima nel tempo. Sfrutteremo allora le relazioni precedenti, ponendo

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} =\right)\ \dot{q}_i = [q_i, H]$$

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} =\right) \dot{p}_i = [p_i, H]$$

1-22

Mostriamo dunque che la funzione generatrice dell'evoluzione temporale è proprio l'Hamiltoniana. A questo proposito portiamo dt a destra delle due uguaglianze:

$$dq_i = dt[q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt$$

$$dp_i = dt[p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$

1-23

E ricordiamo che:

$$\delta q = \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i}$$

$$\delta p = -\epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i}$$

1-24

Segue quindi che attribuendo $\epsilon = dt$ si ha $G = H$, c.v.d.

Abbiamo dunque dimostrato che l'evoluzione temporale stessa è una trasformazione canonica, ottenibile dall'applicazione successiva di trasformazioni canoniche infinitesime nel parametro infinitesimo dt. Ricavare la trasformazione che collega i valori iniziali delle coordinate e dei momenti coniugati al loro valore a ciascun istante significa risolvere il moto del sistema.

Dimostriamo allora *en passant* un risultato fondamentale noto come Teorema di Liouville: dal momento che il risultato delle parentesi di Poisson è un invariante per trasformazioni canoniche, l'evoluzione temporale è una trasformazione canonica e l'elemento infinitesimo di volume dello spazio delle fasi è ricavabile da una parentesi di Poisson, segue l'invarianza dell'elemento di volume evoluto temporalmente. Questo implica, per integrazione, che ogni volume finito nello spazio delle fasi evolve mantenendo costante il proprio volume.

Trasformazioni finite e sviluppo di Taylor

L'evoluzione temporale può essere vista come trasformazione attiva, ossia che sposta il punto rappresentativo del sistema lungo una curva continua nello spazio delle fasi che spazza tutte le configurazioni del sistema nella sua evoluzione temporale. Abbiamo anche visto come una generica trasformazione canonica finita può essere scomposta in una somma di trasformazioni infinitesime in un certo parametro. Quindi ogni punto della curva che rappresenta l'orbita di tutte le possibili trasformazioni corrisponde ad un certo valore del parametro, diciamo α, a partire dalla configurazione iniziale in cui $\alpha = 0$.

Consideriamo adesso una funzione generica di coordinate e momenti, per semplicità non dipendente esplicitamente dal tempo. La sua variazione infinitesima per una trasformazione generica con funzione generatrice *G* sarà:

$$\partial u = u(q + \delta q, p + \delta p) - u(q, p)$$

1-25

Sviluppando al primo ordine si ha:

$$\partial u = u(q,p) + \frac{\partial u}{\partial q}\delta q + \frac{\partial u}{\partial p}\delta p - u(q,p) = \frac{\partial u}{\partial q}\,\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i} + \frac{\partial u}{\partial p}\left(-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = \epsilon[u,G]$$

1-26

Ponendo $\epsilon = d\alpha$ l'espressione precedente si traduce nell'equazione:

$$\frac{du}{d\alpha} = [u, G]$$

1-27

Per individuare una soluzione possiamo ricorrere ad uno sviluppo di Taylor:

$$u(\alpha) = u(0) + \alpha\frac{du}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d^2u}{d\alpha^2}\bigg|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{d^3u}{d\alpha^3}\bigg|_{\alpha=0} + \cdots$$

1-28

E applicando ripetutamente la dipendenza della derivata di una funzione dalle parentesi di Poisson si ricava:

$$u(\alpha) = u(0) + \alpha[u,G]_{\alpha=0} \left.\frac{du}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \frac{\alpha^2}{2!}\big[[u,G],G\big]_{\alpha=0} + \frac{\alpha^3}{3!}\Big[\big[[u,G],G\big],G\Big]_{\alpha=0} + \cdots$$

1-29

Questo sviluppo mostra in modo esplicito come le trasformazioni canoniche infinitesime in un parametro possono generare trasformazioni finite. Nel caso particolare di evoluzione temporale:

$$u(t) = u(0) + t[u,H]_{t=0} \left.\frac{du}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \frac{t^2}{2!}\big[[u,H],H\big]_{t=0} + \frac{t^3}{3!}\Big[\big[[u,H],H\big],H\Big]_{t=0} + \cdots$$

1-30

Simmetrie e costanti del moto

Ripartiamo dalla relazione fondamentale sulla derivata temporale di una certa quantità in funzione delle parentesi di Poisson.

$$\frac{du}{dt} = [u,H] + \frac{\partial u}{\partial t}$$

1-31

Sostituiamo adesso alla funzione *u* una generica funzione generatrice *G*:

$$\frac{dG}{dt} = [G,H] + \frac{\partial G}{\partial t}$$

1-32

Spostiamo adesso l'attenzione sulla variazione infinitesima della funzione Hamiltoniana indotta da *G*:

$$\frac{dH}{d\alpha} = [H,G]$$

1-33

Unendo le due ultime:

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{dH}{d\alpha} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

1-34

Se *G* non dipende esplicitamente dal tempo si ha quindi:

$$\partial H = -\epsilon \frac{dG}{dt}$$

1-35

Il che dimostra che tutte le costanti del moto (ossia quelle per cui $\frac{dG}{dt} = 0$) sono funzioni generatrici delle trasformazioni canoniche che lasciano invariante l'Hamiltoniana. L'immediata conseguenza è la correlazione tra le proprietà di simmetria del sistema e le grandezze conservate: se un sistema è simmetrico per una generica trasformazione, l'Hamiltoniana deve restare necessariamente invariata per effetto di una tale trasformazione. Retroattivamente possiamo dire che tale simmetria genera quindi una costante del moto.

Come esempio possiamo considerare l'impulso come generatore delle traslazioni: se l'Hamiltoniana è invariante sotto traslazioni, ossia non dipende esplicitamente da una coordinata posizionale, e per quanto abbiamo detto il suo momento coniugato è costante. Argomentazioni analoghe valgono per invarianza sotto rotazioni e conseguente conservazione del momento angolare.

Bibliografia

Tutto quello che è stato sviluppato si può trovare nel H. Goldstein *et al*., "Meccanica Classica", la monografia indispensabile sull'argomento.

Indice delle voci