# 4. LA FUNZIONE ICONALE E LA MECCANICA QUANTISTICA

## Introduzione

Dal greco εἰκών, immagine, la funzione iconale (o semplicemente iconale) è una funzione delle coordinate che descrive la propagazione di un fronte d'onda, ossia il luogo geometrico dei punti che oscillano in fase tra loro. Studiare l'iconale significa semplificare il problema di studiare la propagazione come fenomeno ondulatorio, riferendosi piuttosto al raggio di traiettoria. Sappiamo quindi, come nel caso dell'ottica geometrica, che si tratta di una teoria approssimata: essa è valida quando la lunghezza d'onda della luce è molto più piccola delle dimensioni degli oggetti con cui interagisce. In caso contrario, è necessario ricorrere alla teoria ondulatoria completa.

## L'equazione dell'iconale

Consideriamo una grandezza fisica la cui evoluzione possa essere descritta da un'equazione d'onda del tipo:

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\right)\phi = 0$$

4-1

Tale equazione può descrivere la propagazione di un potenziale (ad esempio acustico), ma moltissima fisica è costruita a partire da questo modello (ad es. Klein-Gordon). Nel caso dell'elettromagnetismo il parametro *c* rappresenta la velocità della luce nel vuoto (dal latino, *celeritas*), mentre *n* è l'indice di rifrazione, da cui dipende l'effettiva velocità di propagazione nel mezzo. Ovviamente *n* può cambiare da punto a punto, e in generale il fronte d'onda non percorrere una traiettoria rettilinea.

Nel caso in oggetto l'equazione d'onda si dice omogenea, vista l'assenza di sorgenti che comparirebbero alla destra dell'uguale. Ci sono vari modi di individuare soluzioni all'equazione d'onda, tra cui il metodo di separazione delle variabili che è particolarmente funzionale nel caso monocromatico, ossia scrivendo euristicamente una soluzione del tipo:

$$\phi(t,\vec{x}) = X(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

4-2

Si ha allora:

$$(\nabla^2 + n^2k_0^2)X(\vec{x}) = 0$$

4-3

Avendo definito il numero d'onda nel vuoto:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

4-4

Assumiamo che la parte spaziale della soluzione possa essere scritta come:

$$X(\vec{x}) = A(\vec{x})e^{ik_0 L(\vec{x})}$$

4-5

In cui *L* rappresenta è definita *iconale*, e intuitivamente è associabile al percorso spaziale compiuto onda (ha correttamente le dimensioni di una lunghezza). Inseriamo la soluzione ipotizzata all'interno dell'equazione d'onda. Calcoliamo per prima cosa il gradiente:

$$\vec{\nabla}X(\vec{x}) = e^{ik_0 L(\vec{x})}\left[\vec{\nabla}A(\vec{x}) + ik_0 A(\vec{x})\vec{\nabla}L(\vec{x})\right]$$

4-6

E quindi la divergenza del gradiente, per ottenere il Laplaciano:

$$\nabla^2 X(\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}X(\vec{x}) = e^{ik_0 L(\vec{x})}\left[\nabla^2 A(\vec{x}) + 2ik_0\left(\vec{\nabla}A(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}L(\vec{x})\right) + ik_0 A(\vec{x})\nabla^2 L(\vec{x}) - k_0^2 A(\vec{x})\left|\vec{\nabla}L(\vec{x})\right|^2\right]$$

4-7

Inserendo quanto trovato nell'equazione d'onda e separando la parte reale da quella immaginaria si ottengono due equazioni indipendenti:

$$\begin{cases} \nabla^2 A + k_0^2 A\left[n^2 - \left|\vec{\nabla}L\right|^2\right] = 0 \\ 2\vec{\nabla}L\cdot\vec{\nabla}A + A\nabla^2 L = 0 \end{cases}$$

4-8

L'approssimazione che conduce alla schematizzazione geometrica della propagazione ondulatoria si ottiene allora guardando l'equazione relativa alla parte reale, nel caso di frequenze "ragionevolmente" alte (o lunghezze d'onda basse), per cui il termine di dispersione dell'ampiezza d'onda:

$$\nabla^2 A << k_0^2 A\left[n^2 - \left|\vec{\nabla}L\right|^2\right]$$

4-9

In queste condizioni è possibile semplificare l'equazione riducendola all'*equazione dell'iconale*:

$$n^2 - \left|\vec{\nabla}L\right|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}L\cdot\vec{\nabla}L = n^2$$

4-10

## Proprietà e significato dell'equazione iconale

Ricordando che il gradiente di una funzione *f* punta alla direzione di massimo incremento della funzione, in un intorno di un dato punto la superficie infinitesima normale alla direzione del gradiente è *equifase* rispetto all'onda. In questo senso diremo che il gradiente è localmente tangente al *raggio* o *linea di forza*, inteso come curva di propagazione del fronte d'onda e si può utilizzare la lunghezza del cammino per parametrizzare la curva. Utilizzando queste idee scriveremo quindi:

$$\vec{\nabla}L = u(\vec{x})\hat{L}(\vec{x})$$

**4-11**

In cui si è espressa una proporzionalità tra gradiente e il versore nella direzione tangente al raggio, $\hat{L}(\vec{x})$. Ricordando che il gradiente permette di calcolare la derivata direzionale di una funzione:

$$\vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla}L = \vec{\nabla}_{\vec{\nabla}L}L = \vec{\nabla}_{u\hat{L}}L = u\vec{\nabla}_{\hat{L}}L = u\vec{\nabla}L \cdot \hat{L} = u^2\left|\hat{L}\right|^2 = u^2$$

**4-12**

Si ricava che $u = n$. L'indice di rifrazione $n$ è dunque legato alla rapidità di variazione del fronte d'onda nell'avanzamento. Come ultima osservazione ricordiamo inoltre che il campo del gradiente è sempre irrotazionale (quindi conservativo) in virtù dell'identità differenziale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}L = 0$$

**4-13**

Questo in particolare (teorema di Stokes) permette di concludere che lungo qualsiasi linea chiusa:

$$0 = \oint_{\gamma_{\text{qualunque}}} \vec{\nabla}L \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma_{\text{qualunque}}} n\hat{L} \cdot d\vec{r}$$

**4-14**

La differenza spaziale di fase tra due punti è quindi indipendente dal percorso scelto:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla}L \cdot d\vec{r} = L(2) - L(1)$$

**4-15**

Chiamiamo *cammino ottico* ogni percorso arbitrario tra due punti.

Consideriamo adesso due punti collegati da un raggio, ossia punti accomunati dal passaggio della stessa traiettoria effettiva di propagazione del fronte d'onda (supponendo classicamente che tale raggio sia unico). È allora abbastanza intuitivo mostrare la conclusione di Fermat (*principio del minimo cammino ottico*), secondo cui il raggio rappresenta il cammino ottico avente lunghezza minima. Questo perché per qualsiasi direzione $d\vec{r}$ differente dal raggio vale, per la proprietà precedentemente vista del gradiente, la seguente disuguaglianza:

$$\vec{\nabla}L \cdot d\vec{r} \leq \vec{\nabla}L \cdot nd\hat{l}$$

4-16

E dunque il percorso deve essere più lungo per compensare, tra il punto di partenza e quello di arrivo, i minori contributi infinitesimi all'integrale dati dallo scostamento dalla traiettoria "effettiva". Da questa semplice osservazione è ad esempio possibile ricavare la legge della rifrazione di Snell per il passaggio dell'onda tra due mezzi.

La dipendenza dal tempo è recuperata reintroducendo il fattore oscillante:

$$\phi(t, \vec{x}) = A(\vec{x})e^{i[k_0 L(\vec{x}) - \omega t]}$$

4-17

## Iconale e funzione d'onda in Meccanica Quantistica

Il passaggio alla meccanica quantistica avviene per prima cosa notando la stretta analogia tra l'iconale e la funzione caratteristica di Hamilton:

$$\vec{\nabla}W = \vec{p}$$

4-18

Che riformulato in termini dei valori assoluti:

$$\left|\vec{\nabla}W\right|^2 = p^2$$

4-19

Dove in questo caso $p$ rappresenta il modulo dell'impulso in 3-dim. Si può allora supporre che $W$ sia una buona candidata per il ruolo di iconale spaziale di una certa funzione d'onda. Si potrà scrivere allora:

$$dW = \vec{\nabla}W \cdot d\vec{x} = p \cdot dl$$

4-20

Per recuperare l'intera fase osserviamo che, dalla teoria di Hamilton-Jacobi:

$$dS = dW - Edt$$

4-21

In questo senso diciamo che l'energia è strettamente imparentata alla pulsazione $\omega$. L'azione sembra quindi essere rappresentativa della fase totale di questa nuova funzione d'onda; purtuttavia l'espressione precedente non ha i requisiti dimensionali: per ottenere un numero puro si deve allora individuare una grandezza ancora con le dimensioni di un'azione. Potremmo definire tale grandezza il quanto d'azione, che sarà denominato $\hbar$ e viene definito costante di Planck ridotta (il simbolo "tagliato" significa divisione per $2\pi$). Le nuove relazioni ottenute trovano sintesi nell'espressione della fase totale:

$$\frac{dS}{\hbar} = \frac{p \cdot dl}{\hbar} - \frac{Edt}{\hbar} = kdl - \omega dt$$

4-22

Si può quindi stimare la velocità del fronte di avanzamento dell'onda, calcolabile ponendo $dS = 0$:

$$u = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

4-23

E l'equazione d'onda diviene:

$$\left(\nabla^2 - \frac{p^2}{E^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0$$

4-24

In particolare questa onda ha una lunghezza d'onda di:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

4-25

Un'ultima riflessione sulla velocità e il suo rapporto con l'indice di rifrazione. Volendo recuperare l'equazione d'onda nella forma 4-3 si ottiene:

$$u = \frac{E}{p} = \frac{u_0}{n} \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad n = u_0\frac{p}{E}$$

4-26

È facile realizzare a questo punto che l'approssimazione iconale ha a che fare con il passaggio concettuale da particella a onda. Tale passaggio comporta che l'azione (ossia la fase) sia calcolabile su ciascun punto di un fronte d'onda, quindi in definitiva che il raggio (ossia la traiettoria) sia solo il risultato limite di un processo di approssimazione, come composizione di infiniti contributi concorrenti. Abbiamo visto che tale transizione, nel caso della meccanica, comporta la necessità di introdurre una grandezza dimensionale per la correzione della dimensionalità della soluzione d'onda, che quindi deve necessariamente costituire l'elemento di comparazione per stabilire se in certe circostanze abbia senso parlare di particella piuttosto che di onda.

Riprendiamo l'approssimazione di "particella" e vediamo le condizioni per la sua efficacia, recuperando la forma della soluzione data nella 4-3, considerando della variabilità dell'impulso lungo il cammino:

$$X(\vec{x}) = A(\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}\int dW(\vec{x})}$$

4-27

Il gradiente è presto calcolato:

$$\vec{\nabla}X(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\int dW(\vec{x})}\left[\vec{\nabla}A(\vec{x}) + \frac{i}{\hbar}A(\vec{x})\vec{\nabla}W(\vec{x})\right]$$

4-28

E il Laplaciano:

$$\nabla^2 X(\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\int dW(\vec{x})}\left[\nabla^2 A(\vec{x}) - \frac{1}{\hbar^2}A(\vec{x})|W(\vec{x})|^2 + i\left(\frac{2}{\hbar}\vec{\nabla}A(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}W(\vec{x}) + \frac{1}{\hbar}A(\vec{x})\nabla^2 W(\vec{x})\right)\right]$$

**4-29**

Cosicché inserendo tutto nella 4-3:

$$(\nabla^2 + n^2k_0^2)X(\vec{x}) =$$
$$= e^{\frac{i}{\hbar}\int dW(\vec{x})}\left[\nabla^2 A(\vec{x}) - \frac{1}{\hbar^2}A(\vec{x})|W(\vec{x})|^2 + i\left(\frac{2}{\hbar}\vec{\nabla}A(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}W(\vec{x}) + \frac{1}{\hbar}A(\vec{x})\nabla^2 W(\vec{x})\right) + n^2k_0^2A(\vec{x})\right]$$

**4-30**

E poiché come abbiamo visto:

$$n^2k_0^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

**4-31**

Si ricava che:

$$(\nabla^2 + n^2k_0^2)X(\vec{x}) = \left[\nabla^2 A(\vec{x}) - \frac{1}{\hbar^2}A(\vec{x})(p^2 - |W(\vec{x})|^2) + \frac{i}{\hbar}\left(2\vec{\nabla}A(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}W(\vec{x}) + A(\vec{x})\nabla^2 W(\vec{x})\right)\right]$$

**4-32**

Pertanto all'interno delle parentesi quadra tanto più piccolo è il valore di $\hbar$ e tanto maggiore sarà il peso del termine iconale. Concludiamo quindi che la validità dell'approssimazione di traiettoria corpuscolare dipende dal valore di $\hbar$: nel limite in cui questa costante tendesse a zero non avremmo alcun dualismo particella-onda. È in questo modo dunque che la nostra percezione del mondo dipende anche dal particolare assunto dalla costante di Planck.

## Bibliografia

I testi che sarebbe sufficiente leggere per sviluppare la teoria fin qui presentata sono:

[1] H. Goldstein, "Meccanica classica", Zanichelli
[2] J.J. Sakurai, "Meccanica quantistica moderna", Zanichelli
[3] L. Landau, E. Lifsits, "Meccanica", Editori Riuniti

## Indice delle voci