# 3. FUNZIONE PRINCIPALE DI HAMILTON E TEORIA DI HAMILTON-JACOBI

## Introduzione

Risolvere il moto significa in definitiva individuare la relazione che lega le variabili canoniche $(q, p)$ alle condizioni iniziali $(q_0, p_0)$:

$$\begin{cases} q = q(q_0, p_0, t) \\ p = p(q_0, p_0, t) \end{cases}$$

3-1

È stato mostrato che anche questa trasformazione è canonica, pertanto esprimibile in termini di una funzione generatrice. La trasformazione può essere invertita considerando la dipendenza delle condizioni iniziali, intese come nuove coordinate canoniche, dalle variabili evolute. In questo senso scriveremo:

$$\begin{cases} Q = q_0 = q_0(q, p, t) \\ P = p_0 = p_0(q, p, t) \end{cases}$$

3-2

A tale trasformazione di coordinate corrisponderà una certa Hamiltoniana *K*. Risulta allora chiaro che le nuove equazioni del moto, ovviamente espresse in forma canonica, saranno:

$$0 = \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}$$

$$0 = \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

3-3

Dunque la nuova Hamiltoniana più semplice che realizza questa variazione è una funzione identicamente nulla:

$$K(Q, P, t) = 0$$

3-4

Ricordiamo anche che tale Hamiltoniana può essere espressa in funzione dell'Hamiltoniana originaria attraverso una relazione che include la funzione generatrice:

$$0 = K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

3-5

## Equazione di Hamilton-Jacobi

Proviamo a costruire la funzione generatrice in funzione delle vecchie coordinate $q$ e dei nuovi momenti $P$ e del tempo, ossia una funzione di seconda specie. Una tale funzione generatrice viene usualmente indicata con $S$ e prende il nome di funzione principale di Hamilton:

$$S = F_2(q, P, t) \tag{3-6}$$

Per quanto detto:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{3-7}$$

E la relazione tra le Hamiltoniane si potrà esprimere come:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{3-8}$$

Individuare una soluzione completa significa capire la dipendenza di $S$ dalle vecchie coordinate e dal tempo, ma non dai momenti, per i quali sappiamo solo che devono essere costanti.

L'equazione precedente è nota come equazione di Hamilton-Jacobi. Si tratta di un'equazione differenziale alle derivate parziali che coinvolge le $n$ variabili delle coordinate e il tempo, quindi in totale $(n+1)$ variabili. La soluzione completa di un'equazione differenziale del primo ordine di questo tipo dipenderà dunque da $(n+1)$ costanti di integrazione indipendenti:

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) \tag{3-9}$$

Di questi uno è ininfluente in quanto la forma dell'equazione ci suggerisce che la $S$ sia definita a meno di una costante. Avremo quindi la piena rispondenza della $S$ alla forma di una funzione generatrice di seconda specie se poniamo ad esempio:

$$P_i = \alpha_i \tag{3-10}$$

Che porta a:

$$p_i = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_i} \tag{3-11}$$

Per quanto riguarda le coordinate *Q*:

$$Q_i = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_i} = q_0$$

3-12

A questo punto si può invertire la dipendenza ricavando:

$$q = q(Q,P,t) = q(q_0,p_0,t)$$

3-13

Abbiamo dunque verificato di ricavare le equazioni del moto a partire da una trasformazione canonica "inversa" che porta dalle variabili temporalmente evolute a variabili costanti, che rappresentano le condizioni iniziali. Matematicamente è stato mostrata la corrispondenza tra le *2n* equazioni canoniche (differenziali del primo ordine) e l'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi, anch'essa del primo ordine, circostanza che rappresenta una proprietà più generale rispetto a questa specifica applicazione nel campo della meccanica.

## Significato della funzione principale di Hamilton

La derivata della funzione principale di Hamilton rispetto al tempo è calcolata facilmente:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

3-14

Essendo le *P* costanti. Operiamo le sostituzioni indotte dalla teoria fin qui sviluppata:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

3-15

Quanto si ottiene è:

$$\frac{dS}{dt} = p_i\dot{q}_i - H$$

3-16

Che è esattamente la trasformata di Legendre che porta alla Lagrangiana:

$$\frac{dS}{dt} = L$$

3-17

In questo modo è possibile concludere che *S* differisce dal funzionale d'azione calcolato per la soluzione del moto solo per una costante:

$$S = \int L\, dt + c$$

**3-18**

## Funzione caratteristica di Hamilton

Un caso di particolare interesse è quello in cui l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo. In questo caso, allora, la funzione principale di Hamilton può essere scritta:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - Et$$

**3-19**

In cui E rappresenta proprio l'energia del sistema (lo si può verificare facilmente ricordando che la derivata parziale di *S* rispetto al tempo è proprio l'Hamiltoniana, in questo caso assunta costante).

La $W(q, \alpha)$ è detta funzione caratteristica di Hamilton. Per quanto detto:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

**3-20**

Se calcoliamo allora la derivata totale di W rispetto al tempo potremo scrivere:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = p_i \dot{q}_i$$

**3-21**

## Bibliografia

Anche in questo caso il riferimento è H. Goldstein *et al.*, "Meccanica Classica".

## Indice delle voci