IL MODELLO STANDARD

Lagrangiane ed equazioni di campo

La Lagrangiana di un campo di spin ½ (fermione) non massivo si scrive:

$$L \propto \overline{\psi}\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\right)\psi$$

E la relativa equazione del campo è quella di Dirac:

$$i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0$$

Se introduciamo un termine di massa:

$$L \propto \overline{\psi}\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi$$

L'equazione di Dirac diventa quindi:

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0$$

Gauge e campi di gauge

L'invarianza della Lagrangiana sotto una trasformazione locale di un gruppo di *gauge* arbitrario può essere generalizzata, in analogia con il caso elettromagnetico:

$$\partial_{\mu} \to D_{\mu} = \partial_{\mu} + igG_a W_{\mu}^{a}$$
$$\psi \to e^{iG_a\chi_a(x)}\psi$$
$$W_a^{\mu} \to W_a^{\mu} - \partial^{\mu}\chi_a(x) - gc_{abc}\chi_b(x)W_c^{\mu}$$

Dove:

D_{μ} è la derivata covariante (ottenuta dalla replica dell'accoppiamento minimale della QED);

g è la costante di accoppiamento della gauge;

G_a sono i generatori del gruppo, che ha algebra $[G_a, G_b] = ic_{abc}G_c$;

c_{abc} sono le costanti di struttura del gruppo;

$\chi_a(x)$ sono parametri di trasformazione locali (se fossero globali non porterebbero a bosoni di gauge);

W_a sono i bosoni di gauge, uno per generatore. Gli indici latini dicono che le somme non si riferiscono alla metrica di Minkowski, e possono essere messi in alto o in basso arbitrariamente, e solo per comodità di notazione.

Il tensore degli sforzi di ogni singolo campo bosonico è dato da:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g c_{abc} W^b_\mu W^c_\nu$$

Con questo meccanismo non si è ancora data massa al campo bosonico. Né del resto è evidente come i campi fermionici ne siano dotati. A questo servirà il campo di Higgs.

La trasformazione della derivata è in particolare necessaria perché senza l'aggiunta dei campi bosonici questa non trasformerebbe in maniera covariante.

Il teorema di Noether

Il teorema di Noether stabilisce che per ogni invarianza della Lagrangiana esiste una quadricorrente conservata (ossia una grandezza costante) e fornisce la ricetta per calcolarla.

Supponiamo l'azione di un gruppo unitario che conserva la Lagrangiana. Scelta la data rappresentazione la trasformazione (locale) e infinitesima può essere scritta:

$$\psi^{(i)} \to \psi'^{(i)} = \left(\delta^i_j + \left[M^a\right]^i_j \varepsilon^a\right)\psi^{(j)}(x)$$

In cui riconosciamo che vi è una matrice *M* associata ad ogni singolo generatore del gruppo. *M* rimescola la n-pletta di rappresentazione; vedremo ad esempio che nel settore leptonico avremo ad esempio un doppietto leptone-relativo neutrino sinistri, con gruppo SU(2); analoga cosa per i doppietti di sapore dei quark *u*-*d*, *c*-*s*, *t*-*b*.

Le quadri correnti conservate si costruiscono quindi:

$$\left[J^a\right]^\mu = -\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\mu\psi^{(i)})}\left[M^a\right]^i_j \psi^{(j)}$$

Supponiamo che la Lagrangiana sia invariante sotto azione di SU(2) che opera su un doppietto e consideriamo il generatore n. 3:

$$t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo quindi la componente tempo del quadrivettore conservato:

$$\left[J^3\right]^0 = -\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_0\psi^{(i)})}\left[M^3\right]^i_j \psi^{(j)} \propto \pi^{(1)}\psi^{(1)} - \pi^{(2)}\psi^{(2)} = i\hbar\left[\psi^{(1)+}\psi^{(1)} - \psi^{(2)+}\psi^{(2)}\right] \overset{(\gamma^0)^2 = I}{=}$$

$$= i\hbar\left[\psi^{(1)+}\gamma^0\gamma^0\psi^{(1)} - \psi^{(2)+}\gamma^0\gamma^0\psi^{(2)}\right] \overset{\overline{\psi} = \psi^+\gamma^0}{=} i\hbar\left[\overline{\psi}^{(1)}\gamma^0\psi^{(1)} - \overline{\psi}^{(2)}\gamma^0\psi^{(2)}\right]$$

In cui (1) e (2) si riferiscono alle specie contenute nel doppietto. Riconosceremo tale invariante nell'isospin elettrodebole. Ovviamente per calcolare la quantità conservata si dovrà sommare su tutti i possibili doppietti.

A questo punto è necessario individuare il corretto gruppo di gauge, e assegnare le particelle alle rappresentazioni.

Il settore leptonico

Le particelle incluse nel settore leptonico appartengono a tre famiglie, rispettivamente elettronica, muonica, taunica. In ogni famiglia troviamo la particella e il relativo neutrino.

$SU(2)_L$

Se vogliamo costruire un'invarianza sotto SU(2) (debole, o isospin), dobbiamo individuare come agisce la rappresentazione, e scopriamo un comportamento differente in funzione della chiralità, ossia delle proiezioni sinistre e destre, ricordando che dato un campo si definiscono:

$\psi_L^{(X)} = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi^{(X)}$ è la proiezione sinistra;

$\psi_R^{(X)} = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi^{(X)}$ è la proiezione destra;

Ovviamente si ha: $\psi^{(X)} = \psi_L^{(X)} + \psi_R^{(X)}$

Ebbene, rimarcabilmente sotto il gruppo di gauge SU(2) le proiezioni sinistre formano un doppietto neutrino-particella, mentre quelle destre un singoletto (sembrano non esistere, comunque non dare evidenza di sé tramite interazione, i neutrini destri).

Dunque il gruppo diventa $SU(2)_L$ (*L*=left) e i doppietti sinistri sono (*f*=famiglia leptonica):

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{f,L} \\ f_L \end{pmatrix} = \frac{1-\gamma^5}{2}\begin{pmatrix} \nu_f \\ f \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$$

Mentre i singoletti sono: $e_R \qquad \mu_R \qquad \tau_R$

Il fatto che le componenti destrorse e sinistrorse siano afferenti a due diverse rappresentazioni giustifica la violazione di parità delle interazioni deboli (ricordando che la parità trasforma l'una nell'altra $\psi_L \leftrightarrow \psi_R$).

Il gruppo $SU(2)_L$ ha 3 generatori: chiameremo i relativi di gauge $W^{\pm}$ e W^0. Nella Lagrangiana la gauge ha evidenza attraverso le modifiche:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + igG_a W_\mu^a$$
$$\psi_L^f \to e^{iG_a \chi_a(x)} \psi_L^f$$

In particolare l'accoppiamento minimale nella derivata covariante (secondo termine della somma) è responsabile delle interazioni tra *W* e leptoni. La Lagrangiana presenta quindi il vertice (dovuto al secondo termine tra parentesi):

$$L = i\hbar \overline{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + igG_a W_\mu^a - m \right) \psi$$

Dunque i 3 bosoni sono portatori di isospin, costituendo un tripletto:

Bosone da SU(2)	t_3 (Isospin elettrodebole)
W^+	1
W^0	0
W^-	-1

$U(1)_Y$

Si sottolinea fin d'ora che la fase introdotta da questo gruppo U(1) NON rappresenta la fase dell'ordinaria gauge di QED, ma il gruppo è adesso utilizzato nel contesto più ampio della teoria elettrodebole (e infatti si riferisce all'Ipercarica Y).

L'organizzazione in doppietti di chiralità sinistra sembra presentare un problema sulla carica elettrica, che come è noto si conserva. In effetti l'isospin non può essere legato alla carica elettrica, in quanto attribuirebbe al neutrino carica positiva, cosa che non ha riscontro sperimentale. Quindi deve esserci un'altra gauge applicabile che mette le cose a posto. Il tentativo promosso da Glashow, Weinberg, Salam è introdurre appunto il gruppo di fase U(1). Per questo gruppo agisce singolarmente su ogni particella del settore leptonico.

$$D_\mu \to D_\mu = D_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$$
$$\psi^f \to e^{iY\theta(x)} \psi^f$$

g' è la costante di accoppiamento di questo nuovo gruppo;

Y/2 è il generatore (numero), con il fattore ½ introdotto euristicamente per futura comodità;

B_μ è il bosone generato da questa gauge.

Il meccanismo di interazione di questo bosone con i leptoni è lo stesso dei W, in quanto la Lagrangiana definitiva è:

$$L = i\hbar \overline{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + igG_a W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu - m \right) \psi$$

La quantità invariante derivante da questa simmetria è appunto l'ipercarica *Y*. La conservazione della carica QED è dimostrata valutando la seguente quantità:

$$Q = t_3 + \frac{Y}{2}$$

Il fatto che il bosone B^0 non porti Ipercarica o Isospin debole dipende da una proprietà delle gauge abeliane, i cui bosoni di gauge sono privi di carica (vedi fotone).

Il settore di Higgs

Abbiamo visto che per i leptoni il gruppo di simmetria è $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, che è stato scritto come prodotto tensoriale proprio perché le due trasformazioni non si influenzano e le simmetrie esistono separatamente. Tuttavia ci sono alcuni aspetti da sistemare, ossia:

1. Perché i bosoni deboli hanno massa, e il fotone no?
2. Perché l'unica simmetria manifesta è $U(1)_{QED}$?

Per rispondere a queste domande dobbiamo ricorrere, nel modello standard, allo schema di rottura spontanea di simmetria o Spontaneous Symmetry Breaking (SSB). Rompere la simmetria significa scegliere una soluzione particolare di vuoto per un dato campo, ossia definire un particolare stato fondamentale che quindi, una volta assegnato, non è più invariante sotto il gruppo di gauge. Appena l'Universo decide lo stato di vuoto, questo non è più simmetrico sotto le trasformazioni di simmetria della lagrangiana: "la fisica non è invariante perché le condizioni al contorno non lo sono!".

Dobbiamo in particolare introdurre un nuovo doppietto di mesoni scalari (con *Y*=1) su campo complesso:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

Il doppietto è quindi costruito con quattro campi reali. Prima di giustificare questa introduzione scriviamo la Lagrangiana, la derivata covariante e analizziamo soprattutto meglio la parte del "potenziale":

$$L_H = (D_\mu\varphi)^+ (D_\mu\varphi) - V(\varphi^+\varphi) + \sum_f \eta(\varphi\overline{\psi}_L\psi_R + \text{h.c.})$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igG_a W_\mu^a + ig'\frac{Y}{2}B_\mu$$

$$V(\varphi^+\varphi) = -\mu^2\varphi^+\varphi + \lambda(\varphi^+\varphi)^2$$

La forma degli accoppiamenti del campo con gli altri fermioni (del tipo doppietto L-Higgs-singoletto R) garantisce che anche L_H sia invariante di gauge, in quanto "scalare" di SU(2). Inoltre l'assenza di potenze superiori alla quarta nel potenziale è una condizione necessaria per la rinormalizzabilità (quindi la accettiamo, "e più non dimandiamo"); ovviamente il termine di quarta potenza rappresenta un vertice a quattro rami.

Se μ^2>0 (in alcuni testi si preferisce non mettere in evidenza il segno di μ^2 nel potenziale), si ha un valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero e pari, in valore assoluto:

$$\varphi^+\varphi = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

In pratica questo significa che sul vuoto almeno una componente delle quattro non è nulla.

Se ϑ_a sono i generatori della simmetria nella rappresentazione a cui appartiene il doppietto (di componenti i), allora l'invarianza del potenziale sotto trasformazioni di tale simmetria si scrive:

$$V(\varphi + d\varphi) \approx V(\varphi) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}[\vartheta_a]_{ij}\varphi_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}[\vartheta_a]_{ij}\varphi_j = 0$$

Derivando ancora rispetto al campo:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k}[\vartheta_a]_{ij}\varphi_j + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}[\vartheta_a]_{ik} = 0$$

Supponiamo adesso di aver individuato il valore del doppietto $\overline{\varphi}$ che corrisponde al minimo del potenziale:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}\right|_{\varphi=\overline{\varphi}} = 0$$

Si può allora sviluppare il doppietto a partire da questo minimo:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \qquad \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_+ + \varphi_+' \\ \overline{\varphi}_0 + \varphi_0' \end{pmatrix}$$

Che porta l'equazione precedente alla forma:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k}\right|_{\varphi=\overline{\varphi}} [\vartheta_a]_{ij}\overline{\varphi}_j = 0$$

La derivata seconda del potenziale prende il nome di matrice di massa. L'equazione suggerisce che tale equazione ha tanti autovalori nulli quanti sono i generatori del gruppo per i quali $[\vartheta_a]_{ij}\overline{\varphi}_j \neq 0$, ossia che non lasciano invariante il vuoto. Questa proprietà è nota come teorema di Goldstone.

Rompiamo quindi la simmetria scegliendo adesso un preciso stato di vuoto:

$$\overline{\varphi} = (0,0,0,\overline{\varphi})$$

Questa scelta ha carica nulla (il primo elemento del doppietto è zero), e su questo vuoto è mantenuta la simmetria *U(1)*, che ovviamente adesso è quella elettromagnetica. E' inoltre possibile scegliere una gauge (il cosiddetto gauge unitario) in cui tre componenti del doppietto si annullano, e solo una rimane non nulla, ad esempio:

$\varphi = (0,0,0,\varphi) = (0,0,0,\overline{\varphi} + \varphi')$

Dove φ' rappresenta appunto il bosone di Higgs.

Il settore bosonico

Per effetto della rottura spontanea i bosoni vettori, prima solo trasversi, hanno acquistato massa e quindi terzo grado di libertà (longitudinale). L'idea è che il campo di Higgs interagisca con tali campi restituendogli la proprietà di oscillare avanti-indietro. In una base W^+, W^-, W_3 e B la massa si legge dai termini bilineari della Lagrangiana(i fattori ½ per comodità):

$$L = \varphi^+ \left(-ig \frac{t_a}{2} W_\mu^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \left(ig \frac{t_a}{2} W_\mu^a ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \varphi$$

$$\frac{M^2}{2} = \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$$

Tale matrice si può diagonalizzare (mediante rotazione di Weinberg), ricavando autostati di M^2 che rappresentano particelle a massa definita.

Le particelle che diagonalizzando la matrice precedente sono:

$W^\pm$, di massa $M_{W^\pm} = \frac{g^2 \overline{\varphi}^2}{2}$

$Z^0 = \cos\theta_W W^3 - \sin\theta_W B$, di massa $M_Z = \frac{g^2 + g'^2}{2} \overline{\varphi}^2$

$A = \sin\theta_W W^3 + \cos\theta_W B$, di massa 0 (è infatti il fotone).

Quark

I quark entrano nel modello come doppietti sinistri e singoletti destri di isospin debole. Ogni tipo differente è un sapore (flavour, o flavor). I sapori si organizzano dunque così:

Doppietti SU(2):

$$\begin{pmatrix} u_L \\ \\ d_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_L \\ \\ s_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t_L \\ \\ b_L \end{pmatrix}$$

Mentre i singoletti sono: $u_R \;\; d_R \;\; c_R \;\; s_R \;\; t_R \;\; b_R$

SU(3)

Se nel modello che andiamo a costruire le particelle dette barioni sono prodotte dalla combinazione di tre quarks (che sono fermioni), è necessario introdurre un ulteriore parametro. Ad ogni flavour si associa allora un tripletto di campi (colore) che trasforma come la rappresentazione fondamentale del gruppo SU(3):

$$\psi_{i=FLAVOUR} = \begin{pmatrix} \psi_i^1 \\ \psi_i^2 \\ \psi_i^3 \end{pmatrix}$$

Dal momento che ogni sapore di quark è neutro, la teoria è quindi invariante sotto trasformazioni del gruppo SU(3). Il gruppo ha 8 generatori T, da cui derivano appunto i gluoni. Si pone il campo gluonico come la somma dei contributi degli 8 gluoni (qui *g* e *A* sono differenti da quelli elettrodeboli):

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{8} T_a A_{(a)\mu}(x)$$

Una distinzione importante rispetto alla QED è che i gluoni trasportano carica, mentre il fotone no (questo perché il SU(3) non è abeliano). Definiamo il trasformato di A_μ :

$$A'_\mu = U(x) A_\mu U^+(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^+$$

La derivata covariante è quindi:

$$iD_\mu \psi = (i\partial_\mu - gA_\mu)\psi$$

E' facile vedere che così definita trasforma appunto in maniera covariante. Il tensore del campo bosonico è:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g[A_\mu, A_\nu]$$

Particella	Carica (Q)	Isospin (t_3)	Ipercarica (Y)	Colore
$u_L\ c_L\ t_L$	2/3	+1/2	1/3	Tripletto
$d_L\ s_L\ b_L$	-1/3	-1/2	1/3	Tripletto
$(\nu_e)_L\ (\nu_\mu)_L\ (\nu_\tau)_L$	0	+1/2	-1	Singoletto
$e_L^-\ \mu_L^-\ \tau_L^-$	-1	-1/2	-1	Singoletto
$u_R\ c_R\ t_R$	2/3	0	4/3	Tripletto
$d_R\ s_R\ b_R$	-1/3	0	-2/3	Tripletto
$e_R^-\ \mu_R^-\ \tau_R^-$	-1	0	-2	Singoletto
$(\nu_e)_R\ (\nu_\mu)_R\ (\nu_\tau)_R$	0	0	0	Singoletto
Gluoni (8)	0	0	0	Ottetto
$W^\pm$	±1	±1	0	Singoletto
W^0	0	0	0	Singoletto
B^0	0	0	0	Singoletto
φ	1,0	±1/2	1	Singoletto

Tabella 1. Proprietà dei principali costituenti del modello standard

Quark costituenti e spin	Particella	Carica	Spin
↑u↑u↓d	p	+1	1/2
↑u↑u↑d	Δ^+	+1	3/2
↑u↑u↓u	Δ^{++}	+2	3/2
↑u↓d ↓d	n	0	1/2
↓u↓d ↓d	Δ^0	0	3/2
↓d↓d ↓d	Δ^-	-1	3/2
↓s↓s ↓s	Ω^{-1}	-1	3/2
uds	$\Sigma^0\ \Lambda^0$	0	1/2; 3/2
…	…	…	…

Tabella 2. Esempi di barioni

	$\bar{u}$	$\bar{d}$	$\bar{c}$	$\bar{s}$	$\bar{t}$	$\bar{b}$
u	π^0	π^+	$\bar{D}^0$	K^+	$\bar{T}^0$	B^+
d	π^-	π^0	D^-	K^0	T^-	B^0
c	D^0	D^+	J/ψ	D_s^+	$\bar{T}_c^0$	D_c^+
s	K^-	$\bar{K}^0$	D_s^-	D_s	T_s^-	B_s^0
t	T^0	T^+	T_c^0	T_s^+	D_t	T_b^+
b	B^-	$\bar{B}^0$	B_c^-	$\bar{B}_s^0$	T_b^-	D_b

Tabella 3. Mesoni