Metodi per il calcolo di integrali standard ad una variabile

Luca Alfinito – maggio 2018

Casi triviali

- Integrale di funzione notevole per costante;
- Integrale di somma di funzioni notevoli.

Metodi

Per procedere *step-by-step* conviene seguire questo percorso:

1. **L'integrale è già nella sua forma un integrale notevole?**

Ovviamente la risposta dipende dall'estensione personale della lista. Qui quella proposta da: http://www.math.it/formulario/integrali.htm

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\text{, con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c$$

$$\int senx\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = senx + c$$

$$\int (1 + tg^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$$

$$\int (1 + ctg^2 x)dx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = -ctgx + c$$

$$\int senh\,x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\,dx = senh\,x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

$$\int \frac{1}{senx}dx = \log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left|tg\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} arcsenx + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arccos x + c \\ -arcsenx + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \begin{cases} arcsenh\,x + c \\ \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{(x^2 \pm a^2)}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{(a^2 - x^2)}dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arcsen\,\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$$

$$\int sen^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - sen\,x\cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + sen\,x\cos x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \int (1 - tgh^2 x)dx + c = tghx + c$$

A mio avviso questa lista può essere alleggerita. Ad esempio suggerisco di ricordare che:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

"*i*" si comporta come un numero, e vale $i^2 = -1$

Procedendo poi con gli altri metodi, vediamo cos'altro è possibile ricavare.

2. **L'integrale è in qualche modo riconducibile ad un integrale notevole perché sono bene individuabili la funzione composta e la derivata?**

Qui qualche esempio:

$$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x)dx = sen\, f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot sen\, f(x)dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\log_e a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}dx = \begin{cases} arcsen f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}dx = arctg f(x) + c$$

3. **Esiste un integrale notevole la cui forma è *simile* a (ossia: la cui struttura *richiama*) quella del nostro integrale da calcolare?**

<u>ESEMPIO:</u>

$\int \frac{1}{(1+3x)^2 + 5}dx$ assomiglia a $\int \frac{1}{u^2 + 1}du$

A questo punto quindi la domanda può essere di due tipi equivalenti:

3.a) Ritrovo la forma notevole perché riesco già ad individuare la funzione composta, e la derivata della funzione annidata è già evidente?

<u>ESEMPIO:</u>

Nel caso precedente:

$$\int \frac{1}{(1+3x)^2+5}dx = \int \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{(1+3x)^2}{5}+1}dx\,,$$ a parte il fattore 1/5 potrei considerare che:

$[f(x)]^2 = \frac{(1+3x)^2}{5}$ ossia $f(x) = \frac{1+3x}{\sqrt{5}}$ e banalmente $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, che essendo puramente numerico può essere introdotto con agilità per ottenere l'integrale di una funzione composta:

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx = \arctan f(x) + C$$

Casi in cui è utile: in tutti quelli in cui $f(x) = ax + b$, ossia è un polinomio di primo grado (la derivata è *a*).

<u>ESEMPIO:</u>

$\int \frac{1}{Ax^2+Bx+C}dx$ tutto sta a "spezzare" *C=D+E* tale che:

$\int \frac{1}{\left(Ax^2+Bx+D\right)+E}dx = \int \frac{1}{\left(Fx+G\right)^2+E}dx = \frac{1}{E}\int \frac{1}{\frac{\left(Fx+G\right)^2}{E}+1}dx$ e si riconduce all'integrale precedente.

3.b) Ritrovo la forma notevole perché ho in mente la sostituzione da effettuare, ricordando che introduce anche un termine di passaggio tra infinitesimi (il famoso Jacobiano)?

Sempre considerando uno degli esempi precedenti arrivo a:

$\frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{(1+3x)^2}{5}+1}dx$ ed opero la sostituzione: $X = \frac{1+3x}{\sqrt{5}}$

Cosa succede? Che devo ricordarmi di sostituire anche *dx* in funzione di *X*, applicando la semplice regola:

$$dx = \frac{dx}{dX}dX$$

Dunque devo invertire questa relazione:

$X = \frac{1+3x}{\sqrt{5}}$ ottenendo la dipendenza di *x* da *X*: $x = \frac{\sqrt{5}X-1}{3}$,quindi $\frac{dx}{dX} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Si ha pertanto:

$\frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{(1+3x)^2}{5}+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{X^2+1}\frac{\sqrt{5}}{3}dX$ che porta formalmente allo stesso caso precedente.

I due metodi a) e b) sono perfettamente equivalenti. Formalmente l'idea può essere così vista:

$$\int g[f(x)]f'(x)dx =$$

$$t = f(x) \quad \Rightarrow \qquad dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = \frac{1}{\left(dt/dx\right)}dt = \frac{1}{f'(x)}dt \quad \Rightarrow \quad f'(x)dx = dt$$

$$\int g[f(x)]f'(x)dx = \int g(t)dt$$

3.c) Ritrovo la forma "sospetta" di qualche relazione goniometrica che tornerebbe utile in una sostituzione?

<u>ESEMPIO 1:</u>

$\int \sqrt{1-x^2}dx$ mi induce ad operare la sostituzione: $x = \sin X$

Osservazione: in questo caso la sostituzione esprime *X* in funzione di *x*, quindi mi fa vedere subito cosa fa la derivata:

$$dx = \frac{dx}{dX}dX = \cos X dX$$

Così l'integrale diventa:

$\int \sqrt{1-x^2}dx \overset{x=\sin X}{=} \int \cos X \cdot \cos X dX = \int \cos^2 X dX$ esprimibile in termini di $\cos 2X$

<u>ESEMPIO 2:</u>

Un esempio svolto per eliminare un integrale dalla lista dei notevoli:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x=\sin X}{=} \int \frac{1}{\cos X}\cos X dX = X + C \overset{X=\arcsin x}{=} \arcsin x + C$$

<u>ESEMPIO 3:</u>

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \overset{x=\tan X}{=} \int \frac{1}{1+\tan^2 X}\frac{\cos^2 X + \sin^2 X}{\cos X^2}dX = \int 1 \cdot dX = X + C \overset{X=\arctan x}{=} \arctan x + C$$

OSSERVAZIONE: anche qui è necessario saper maneggiare bene le funzioni goniometriche, e spesso è utile ricordare la formula fondamentale $\cos^2 X + \sin^2 X = 1$

OSSERVAZIONE 2: nel caso di funzioni iperboliche la forma fondamentale non richiama l'equazione di una circonferenza ma quella di un'iperbole, ossia: $\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1$

In particolare è utile sapere che:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4. **Integrale per parti**

L'idea deriva da:

$[fg]' = f'g + g'f$ che comporta: $\int f'g = fg - \int g'f$

Quindi devo sapere scindere l'integrando in un sapiente prodotto tra una funzione derivata e una funzione primitiva.

Quando conviene applicare: in tutti i casi in cui, ad esempio, si sa integrare $xg'(x)$

$$\int g(x)dx = \int \underset{\text{è la derivata di x}}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot g(x)dx = xg(x) - \int xg'(x)dx$$

Suggerimento: il metodo non deve "esplodere", ossia i due termini a destra dell'uguale non devono avere in generale potenze maggiori del termine di partenza!

<u>ESEMPIO:</u>

Il caso più eclatante è:

$$\int \ln x dx = \int \underset{\text{è la derivata di x}}{\underset{\downarrow}{1}} \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C$$

Integrali di funzioni razionali polinomiali

Si arriva sempre ad un integrale del tipo (altrimenti se il grado del numeratore è >1, si procede con divisioni tra polinomi e si spezza l'integrale):

$$\int \frac{Mx+N}{Px^2+Qx+R}dx = \int \frac{\frac{M}{2P}2Px + \frac{M}{2P}Q + (N - \frac{M}{2P}Q)}{Px^2+Qx+R}dx = \frac{M}{2P}\int \frac{2Px+Q}{Px^2+Qx+R}dx + \int \frac{N - \frac{M}{2P}Q}{Px^2+Qx+R}dx =$$

$$= \ln\left|Px^2+Qx+R\right| + \int \frac{N - \frac{M}{2P}Q}{Px^2+Qx+R}dx$$

Il secondo dei due integrali è già stato visto.

Caso goniometrico

E' un'integrale goniometrico quando ho seni e/o coseni a giro.

Mi devo domandare subito se riesco ad isolare facilmente la derivata e quindi ritornare al metodo della funzione composta.

ESEMPIO:

$\int \frac{\tan x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx =$ e qui è facile vedere che ho la derivata della funzione.

Oppure mi domando se ho funzioni coseni e seni elevati a potenza riconducibili a formule di Werner:

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(y-x) - \cos(y+x)),\ \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)),$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(y+x) + \cos(y-x)),\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1),$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(y+x) - \sin(y-x)),\ \cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Quando conviene applicare: il metodo è molto potente quando ho potenze al quadrato.

ESEMPIO:

$\int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos(2x)+1}{2} dx$ e a questo punto il caso è triviale

Altre idee

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) dx = \int \left(1 + \cot^2 x\right) dx$$

Domande

E' una somma di integrali notevoli o facilmente riconducibili?

E' sotto forma di frazione?

E' riconducibile ad una funzione composta? In particolare: riesco ad isolare la derivata della funzione annidata?

Se non riesco ad isolarla ad occhio, posso sistemare le cose con una sostituzione?

E' una sostituzione goniometrica?

Cambio metodo. Riesco ad individuare due funzioni per l'integrazione per parti?